

基于局部体积约束的流-热耦合拓扑优化研究

A FLOW-THERMAL COUPLED TOPOLOGY OPTIMIZATION STRATEGY FOR LIQUID-COOLED HEAT DISSIPATION BASED ON LOCAL VOLUME CONSTRAINTS

侯胜乐, 任梦柯, 刘耘溥, 李征, 阮诗论, 谷俊峰, 申长雨

Hou Shengle, Ren Mengke, Liu Yunpu, Li Zheng, Ruan Shilun, Gu Junfeng,
Shen Changyu

(大连理工大学工程力学系, 大连 116024)

摘要 对液冷散热系统中的流热耦合拓扑优化问题, 提出了一种基于密度方法的通道构型优化策略。传统优化方法在同时考虑温度场与流场耦合作用时, 常因耗散能约束导致算法陷入局部最优, 表现为优化生成的管道结构过于简化(如单一主通道或稀疏分支), 难以充分利用流固接触面积提升散热效率。为此, 本文创新性地引入了局部体积约束函数, 通过调节设计域内的材料体积分布, 打破由全局耗散能约束引发的灵敏度冲突, 从而引导优化过程跳出局部最优陷阱。具体而言, 首先构建了以系统平均温度最小化为目标、压力损失为约束的流热耦合拓扑优化模型, 基于 Navier-Stokes 方程与能量方程描述流体流动与传热过程; 其次, 在移动渐近线法(MMA)框架内, 通过叠加局部体积约束函数强化复杂分支结构的连续性演化。数值计算表明, 相较于传统全局约束方法, 在相同能量耗散约束下显著提升流固接触面积, 平均温度降低 20.3%, 且优化后的管道呈现多级分形分支特征。本研究为高功率电子设备液冷系统设计提供了兼具散热性能与工程可行性的优化方法, 其核心思想亦可拓展至多物理场耦合拓扑优化领域。整个数值实现依赖 OpenFOAM 和 PETSC 开源软件包。

关键词 拓扑优化, 流热耦合, 局部体积约束, 液冷通道, OpenFOAM

引言

在高功率电子设备中，散热是影响其性能和可靠性的关键因素。液冷散热板作为一种高效冷却元件，利用液体冷却剂优异的热容量和传热性能，能够在有限空间内快速将热量导出，因此广泛应用于功率电子和电动汽车电池等领域^[1]。相比传统的空气冷却方案，液冷却板可以大幅降低器件温度，提高系统稳定性和寿命。然而，如何设计出结构紧凑且散热性能优异的液冷却板是一项具有挑战性的工程问题。拓扑优化作为一种系统化的结构优化方法，近年来被引入液冷却板的设计中，用于自动寻优冷却通道的布局，以显著提升散热效率。这种方法摒弃了以往基于经验的反复试错设计，使工程师能够探索非常规却高效的冷却结构拓扑。

流-热耦合拓扑优化已在液冷散热板等换热器设计中得到广泛应用并展现出巨大的性能提升潜力。Zhan 等人^[2]通过拓扑优化得到分支状冷却通道，提高了温度均匀性。Yan 等人^[3]采用双层流-固耦合模型优化微通道布局，降低了芯片表面温差。Zeng 等人^[4]则对拓扑优化生成的微通道冷却片进行了实验验证，结果显示其热阻相比传统直通道降低了 20%以上。杨智颖等人^[5]基于变密度法的拓扑优化策略，实现了电动汽车电池液冷板的流道设计优化，显著改善了压降和温度均匀性。凌和平等人^[6]针对车用功率模块提出多目标拓扑优化方法，在降低压降损失的同时有效降低最高温度。王昊东^[7]等人面向微通道化学反应器冷却，将拓扑优化与传统平行流道对比，发现新型分叉流道在温度均方差和流动阻力等指标上优势显著。李新磊等人^[8]通过 OpenFOAM 平台优化得到的再生冷却通道拓扑构型显著强化换热性能。

本研究的创新之处在于在拓扑优化框架中引入局部体积约束策略来优化冷却通道的分布。该策略的目的是强制保留一定比例的流体或固体体积分数，从而在优化过程中鼓励通道呈现多孔或晶格状结构。通过这种方式，可以显著提高流体与固体的接触面积，强化对流换热效率。同时，局部体积约束有助于避免单一“粗壮”通道的出现，促使形成均匀分布的细小流道网络，使温度场更均匀。本研究的方法有望在降低高温器件温度的同时进一步改善温度分布均匀性，为液冷散热板的高性能设计提供新的思路和方法。

1 流-热耦合拓扑优化模型

1.1 控制方程

本文考虑的流体状态是不可压缩稳态流体流动、忽略粘性耗散和不考虑重力效应，由于模型的尺寸较小，雷诺数一般在几十到几百之间，流动状态为层流，并且建立统一的数学控制模型，模型的控制方程及边界条件可以表示为

$$\begin{aligned}
 & \text{N-S 方程} \\
 & \begin{cases} -\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \eta \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \nabla p - \mathbf{F}_b = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_m & \text{on } \Gamma_{in} \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \Gamma_{wall} \\ [\eta(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - p\mathbf{I}] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}_N & \text{on } \Gamma_{out} \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

能量守恒方程

$$\begin{cases} \rho c(\mathbf{u} \cdot \nabla T) - \nabla \cdot (k \nabla T) - Q = 0 & \text{in } \Omega \\ T = T_{in} & \text{on } \Gamma_{in} \\ k \nabla T / \rho c \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_{wall} \\ k \nabla T / \rho c \cdot \mathbf{n} = q_{out} & \text{on } \Gamma_{out} \end{cases} \quad (2)$$

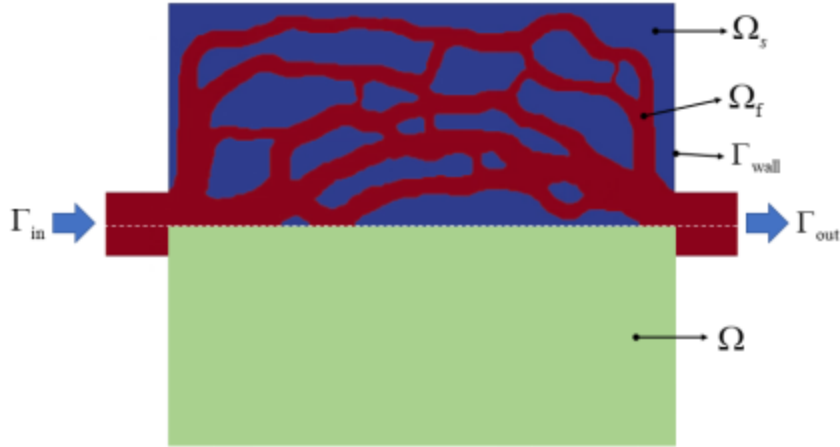


图 1 边界条件及分析域示意图

Figure 1. Schematic of the Boundary Conditions and Analysis Domain

方程的边界条件及分析域示意图见图 1，其中 Ω 表示计算域， Ω_f 是流体区域， Ω_s 是固体区域， Γ 表示边界，下标 in、wall 和 out 分别表示入口边界、壁面边界和出口边界。 ρ 是流体质量密度， \mathbf{u} 和 p 分别是速度场和压力场。 η 是动态粘度， F_b 是流体的体积力。 \mathbf{u}_{in} 是边界上的指定速度。 T 是温度场， \mathbf{n} 是单位向外法线， c 是比热容， k 是导热系数， Q 是热源项， T_{in} 和 q_{out} 是边界上的指定温度和热通量， \mathbf{I} 是二阶单位张量。

1.2 材料插值方案

对于 SIMP 法的流体拓扑优化方法，其设计域假想为多孔介质结构，通过引入 Brinkman 摩擦项，假定流体阻力 F_b 与流速 \mathbf{u} 成正比，即

$$\mathbf{F}_b = -\alpha_f \mathbf{u} \quad (3)$$

其中， α_f 由下式的 RAMP 插值方式确定

$$\alpha_f = \alpha_{max} \frac{q_\alpha(1-\gamma)}{q_\alpha + \gamma} \quad (4)$$

其中， γ 为计算域中的伪密度场。 α_f 其与中间密度场有关。在流体区， α_f 等于 0，这表示没有人工阻力项，而是直接求解 N-S 方程。在固体区域， α_f 等于相对较大的数 α_{max} ，

以将速度逼近 0。 α_{\max} 基于达西渗流理论确定

$$Da = \frac{\eta}{\alpha_{\max} l^2} \quad (5)$$

α_{\max} 的连续方案如下^[9]

$$\alpha_{\max} = \begin{cases} \left(\frac{\text{opt}}{7} + 1 \right) \alpha_{\text{ini}} & \text{opt} \leq \text{opt}_0 \\ \left[\left(\frac{\text{opt}_0}{7} + 1 \right) \alpha_{\text{ini}} \right] 1.05^{\text{opt} - \text{opt}_0} & \text{opt} > \text{opt}_0 \end{cases} \quad (6)$$

其中，opt 为当前优化步， opt_0 是可调参数，本文取 63， α_{ini} 为 α_{\max} 的初始值，本文同样使用 RAMP 插值方案对导热系数 k 进行插值

$$k = k_f + (k_s - k_f) \frac{q_k(1-\gamma)}{q_k + \gamma} \quad (7)$$

其中 q_a 和 q_k 为惩罚因子，在设计域中他们取相同的值，即 $q_a \equiv q_k \equiv q$ ，而在它可以显著地将中间项 $\frac{q(1-\gamma)}{q+\gamma}$ 向极值 0 和 1 方向插值，本文中， q 初始值设置为 0.005，并随迭代步数 (opt) 线性增加： $q = 0.005 + \text{opt} \times (5 \times 10^{-5})$ 。

1.3 结构复杂度控制

在流热耦合拓扑优化中，流体管道的几何复杂程度直接影响散热性能。从固体域传递到流体域的热量可以由牛顿冷却定律描述

$$\bar{q} = hA(T_{\text{surface}} - T_{\text{fluid}}) \quad (8)$$

其中 h 为对流换热系数， A 为接触面积， T_{surface} 为固体表面温度， T_{fluid} 为流体温度，接触面积 A 与管道拓扑结构直接相关，复杂的分形或多级分支设计可显著提升 A ，因此，通过增大流体与固体间的接触面积，可显著提升对流传热效率。本研究目标为最小化系统平均温度 (T_{avg})，同时施加能量耗散约束。然而，当对压力约束进行放松时，优化结果易陷入局部最优，表现出一些无物理意义的细小管道^[9]，而非预期的复杂分支结构。本节将分析此问题的数学根源，并提出通过引入局部体积约束打破局部最优的解决方案。局部体积约束方程由下式约束

$$\max_{V_e} (\bar{\gamma}_e) \leq V_{\max} \quad (9)$$

$$\bar{\gamma}_e = \frac{\sum_{i \in N_e} \gamma_i}{\sum_{i \in N_e} 1} \quad (10)$$

其中， V_{\max} 是局部体积约束的上限值， $\bar{\gamma}_e$ 是单元 e 周围邻域中的局部材料分布， γ_i 是第 i 号单元的密度值， N_e 为在给定影响半径 R_e 下，更靠近单元 e 的所有周围单元的集合，即

$$N_e = \{i \mid \|\gamma_i - \gamma_e\|_2 \leq R_e\} \quad (11)$$

由于 (9) 式是不可微的，因此不能直接应用于数值优化方案。我们使用 p -范数函数来近似 \max 函数，为了和压力符号 p 有所区分，下文中 p -范数中的 p 使用 \bar{p} 表示

$$\max_{ve}(\bar{\gamma}_e) \approx \|\bar{\gamma}_e\|_{\bar{p}} = \left(\sum_e \bar{\gamma}_e^{\bar{p}} \right)^{\frac{1}{\bar{p}}} \quad (12)$$

因此，约束重新表述如下

$$\left(\frac{1}{n} \sum_e \bar{\gamma}_e^{\bar{p}} \right)^{\frac{1}{\bar{p}}} \leq V_{\max} \quad (13)$$

其中 n 是设计域内设计变量的数量。较大的 \bar{p} 更严格地执行每体素约束，同时增加问题的非线性。在我们的示例中，我们选择 $\bar{p} = 16$ 。

1.4 拓扑优化问题

现在我们将稳态强制对流的优化设计问题公式化。在本文中，通过整个计算区域的平均温度来衡量散热器的冷却能力

$$\Psi = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} T d\Omega \quad (14)$$

其中， Ψ 表示目标函数， $|\Omega|$ 表示计算域的体积。约束函数为耗散能约束和局部体积约束

$$J = - \int_{\Gamma_{inout}} \left(p + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \leq \bar{J} \quad (15)$$

$$G = \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_e \bar{\gamma}_e^{\bar{p}} \right)^{\frac{1}{\bar{p}}}}{V_{\max}} - 1.0 \leq 0 \quad (16)$$

综上，基于密度法的数学优化模型可以定义如下

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & \Psi = \frac{1}{|\Omega|} Td\Omega \\
\text{Subject to:} & J \leq \bar{J} \quad \text{Power dissipated} \\
& G \leq 0 \quad \text{Local volume constraints} \\
& 0 \leq \gamma \leq 1 \\
& \text{Eqs: (1) and (2)} \quad \text{Governign variable bounds equations}
\end{array}$$

目标函数（或约束函数）相对于设计变量的灵敏度可以使用链式法则来计算

$$\frac{d\Psi}{d\gamma} = \frac{d\Psi}{d\gamma_h} \frac{d\gamma_h}{d\gamma_p} \frac{d\gamma_p}{d\gamma} \quad (17)$$

式中， γ_p 和 γ_h 分别为 Helmholtz 偏微分方程（PDE）滤波器^[10]和保体积 Heaviside 滤波器^[11]滤波后的伪密度。其中，保体积的 Heaviside 滤波器可以确保优化的稳定性和效率

$$\gamma_h = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\gamma_p - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))} \quad (18)$$

式中， β 为惩罚因子， η 为截止值。本文将 η 设为 0.5，而 β 的值设为 $\text{opt} \times 0.1$ 线性增加， opt 为优化步。

到此为止，我们可以得到整个优化流程框架，如图 2 所示，首先读取材料的基本属性，然后初始化计算所需的场变量，在初始化完场后，开始计算速度场 \mathbf{u} 和温度场 T ，接下来开始求解灵敏度，目标函数和耗散能约束通过求解伴随变量（ $\mathbf{u}_a, T_a, \mathbf{u}_b$ ）实现，局部体积约束的灵敏度可通过式（16）直接对伪密度场求导获得，对灵敏度过滤后，将目标函数和约束函数的灵敏度数据以及优化变量 γ 传入 MMA 以更新优化变量。最后伪密度场 γ 将依次进行各向同性 Helmholtz 过滤和保体积 Heaviside 过滤得到 γ_h 完成一次迭代循环。当密度法优化步达到最大迭代步数时结束循环。

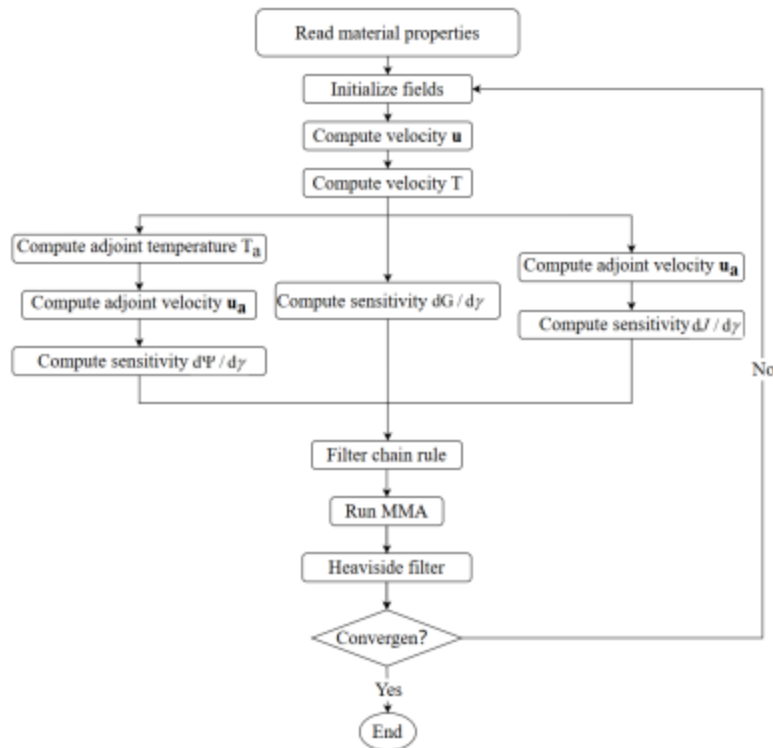


图 2 优化流程图

Figure 2. Optimization Flowchart

2 数值求解

2.1 模型描述

拓扑优化问题的初始设计域几何形状和物理边界条件如图 3 (a) 所示。基于材料密度的拓扑优化方法是一种常用方法，其核心在于将具有特定密度值的不同材料分配到给定设计域 Ω_d 内，以最大限度地满足预定义的设计目标和物理约束。如图 3 (b) 所示。模型的上部是翅柱式的优化结构，底部是热源区域 (Ω_h)。在 Z 轴方向沿着各截面的通道的翅柱结构相同，初始 Ω_d 处于均匀的中间密度状态，即 $\gamma = 0.5$ 。优化后的 Ω_d 将产生两个不重叠的固体翅片区域 Ω_s ($\gamma = 0$) 和流体区域 Ω_f ($\gamma = 1$)。冷流体从入口进入后进行热交换，并在出口处以高温状态流出，其中，Inlet 和 Outlet 分别为入口边界和出口边界，Inlet 采用恒定流速 ($u = 0.1\text{m/s}$) 和恒定温度 ($T = 0$) 条件，Outlet 采用自由流出压力条件，wall 为壁面边界，采用绝热无滑移速度条件，翅片和底部热源材料选用金属铝，并选择液态水作为冷却剂，材料参数见表 1。

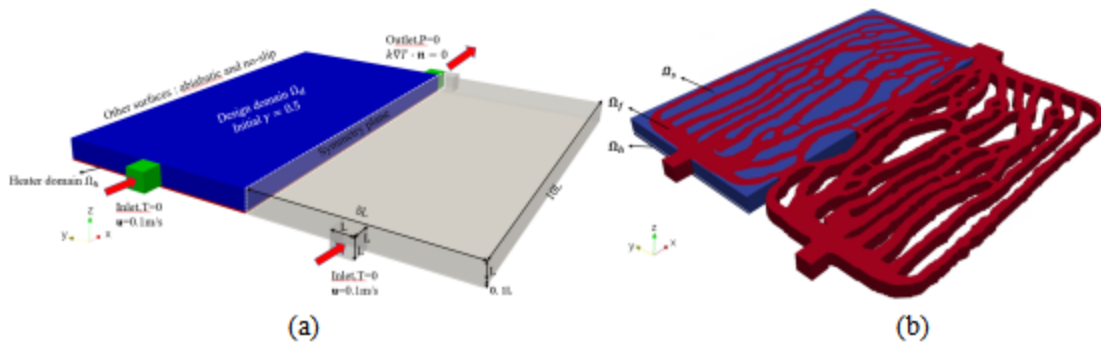


图 3 模型的几何形状和边界条件

Figure 3. Model Geometry and Boundary Conditions

表 1 金属铝和液态水的材料参数

Table 1. Material Properties of Aluminum and Liquid Water

Material	Aluminum	Water
$k_{\text{铝}} / (m \times K)$	237	0.61
$c [J / (kg \times K)]$	880	4180
$\rho_{\text{铝}} / m^3$	2700	1000
$\mu_{\text{水}} \times m^2$		0.001

该模型的网格由 HyperMesh 完成，并基于开源软件 OpenFoam 的 simpleFoam（流场）和 scalarTransportFoam（温度场）求解控制方程和伴随方程，过滤后通过 PETSc 框架中的 MMA（Method of Moving Asymptotes）^[12]对密度场进行更新，温度场及伴随温度场的计算都是基于 harmonic 插值方式实现。

2.2 不同约束上限

图 4 是在不加局部体积约束时的优化结果，从左到右依次为流道结构、速度场、温度场。图 5 是局部体积约束半径为 5 个单元时，约束上限从 0.5 到 0.7 的优化结果，并且给出了目标函数值。

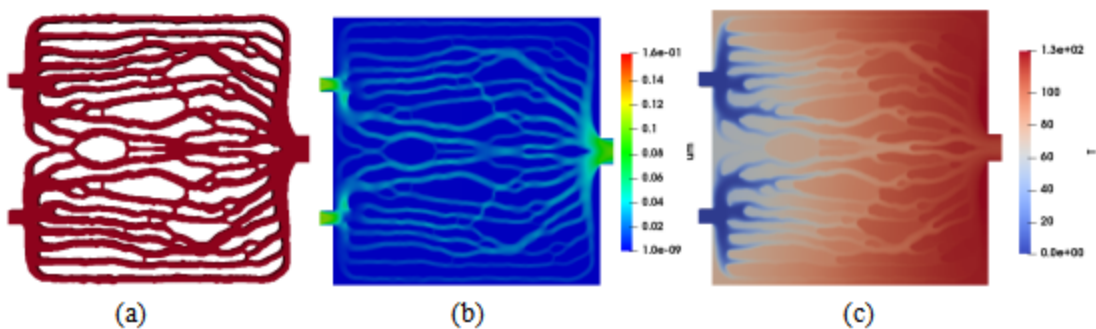


图 4 不加局部体积约束时的优化结果 (a)流道结构, (b)速度场, (c)温度场)
Figure 4. Optimization Results Without Local Volume Constraints: (a) Flow Channel Structure, (b) Velocity Field, (c) Temperature Field

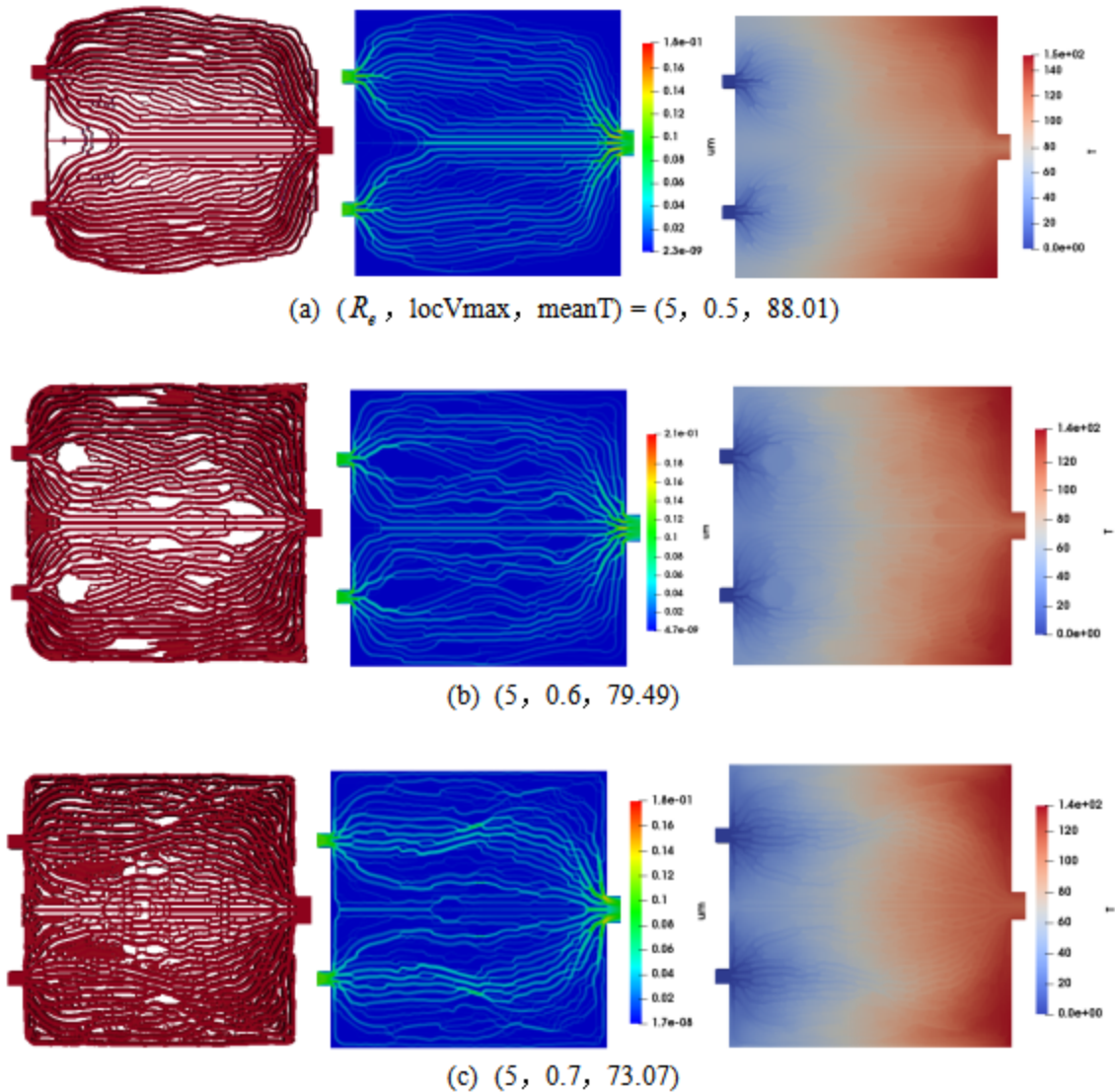


图 5 不同局部体积上限结果

Figure 5. Results for Different Local Volume Upper Limits

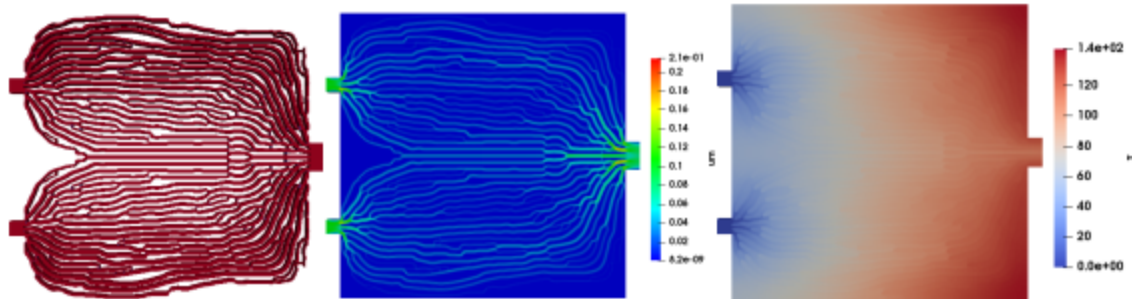
通过图 5 的流道结构可以看出,局部体积约束通过约束流道的体积,在散热板中形成了更加复杂的流道结构。这种结构优化能够显著改善流体流动的分布。与不加局部体积约束时的流道结构(图 4)相比,加入约束后流体流动的路径变得更加均匀,避免了直线流动造成的低流速区域。这种流道结构的变化直接影响了流体与固体之间的热交换效率。通过更复杂的流道形态,流体与固体的接触面积增加,使得热量能够更有效地传递至流体,从而提高了散热效果。加入局部体积约束后流场的分布得到明显改善。在没有局部体积约束的情况下,

流体流动不够均匀，部分区域的流速较低。而加入局部体积约束后，流速分布变得更加均匀，避免了低流速区域的形成。这种流动优化有助于提升冷却效率，因为均匀的流速能够使得热量更快地传递至冷却液中，从而有效降低散热板的温度。从温度场中可以看出，加入局部体积约束后，结构上游的温度明显降低，从而降低了整体平均温度。没有局部体积约束时，散热板的平均温度为 89°C ，而加入约束后，平均温度显著降低，尤其是当局部体积约束上限为 0.7 时，结构整体的平均温度降低了 20%。

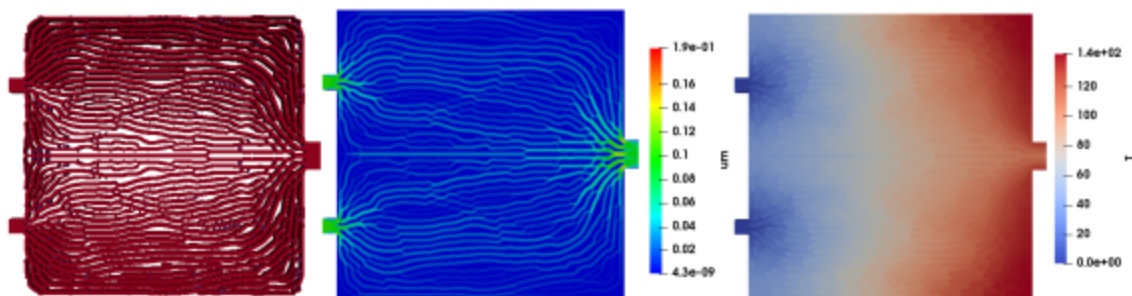
对比在相同边界条件下局部体积约束上限分别为 0.5、0.6 和 0.7 的液冷散热板优化结果，可以发现局部体积约束上限的提高显著影响流道结构复杂性、速度场均匀性以及温度场的耦合效果。当局部体积约束上限为 0.5 时，由于局部区域允许的流体体积比例较低，优化得到的流道网络更加细密复杂，冷却液通过多分支细道均匀覆盖散热板各区域，流场分布较为均衡，平均温度约为 88.01°C ，表明散热性能得到一定保障。当上限提高至 0.6 和 0.7 时，流道结构仍保持较高的复杂度，但通道略为加粗，冷却液可以充分地覆盖热源区域，速度场分布更加均匀，高流速区域适度扩展且不过度集中。这种优化的流动分配有效增强了对流换热，热量能够迅速随流体带走，使平均温度分别降至 79.49°C 和 73.07°C 。较高局部体积占比的设计使高速流动区域与高热负荷区域更好地匹配，从而提高了对流换热效率，冷却性能大幅改善。

2.3 局部体积约束下限影响

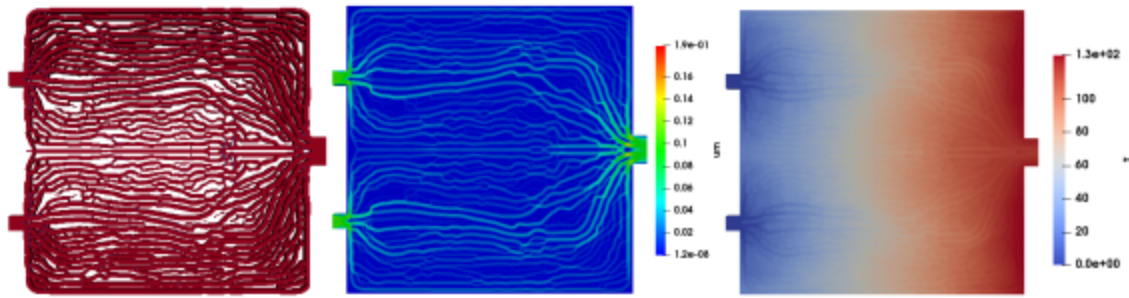
在以上局部体积约束上限的基础上，我们还增加了局部体积约束的下限，如图 10 所示



(a) $(R_g, \text{locVmax}, \text{locVmin}, \text{meanT}) = (5, 0.5, 0.2, 88.59)$



(b) $(5, 0.6, 0.3, 80.38)$



(c) (5, 0.7, 0.3, 71.11)
图 6 增加局部体积约束下限后的优化结果

Figure 10. Optimization Results After Increasing the Lower Limit of the Local Volume Constraint

当引入局部体积下限约束后，流场分布趋于均匀。同样在边界条件保持一致的情况下，随着局部体积分数下限从 0.2（图 6(a)）提高至 0.3（图 6(b)）（上限由 0.5 增至 0.6），冷却流道更加广泛地覆盖各个区域，避免了局部流体不足的“死区”。相应地，流体分配更为均匀，各区域流速差异减小，速度场更平稳，整体流动均匀性的提升使对流换热更充分，原本高温区域得到加强冷却，温度场分布更加均衡。热性能结果表明，加强局部体积约束降低了散热板的平均温度并改善了温度均匀性：当局部下限仅为 0.2 时，平均温度高达 88.59°C，下限提高至 0.3 时降至 80.38°C（降幅约 11%），在下限保持 0.3 且上限放宽至 0.7 时（图 6(c)）进一步降至 71.11°C，总降幅约 20%。这表明较高的局部下限有效确保各区域具备最低冷却能力，避免散热薄弱区域，从而提升整体热管理性能；而较大的上限允许关键区域分配更多流体体积强化散热，进一步降低了平均温度。

图 7 展示了所有算例的目标函数值（平均温度）迭代曲线：目标函数值在前 30 步内大幅下降，在 30-200 步内有显著回升，并在 250 步后逐渐收敛。这是由于算例具有类似的流道生成机制以及采用了相同的放松策略导致的。

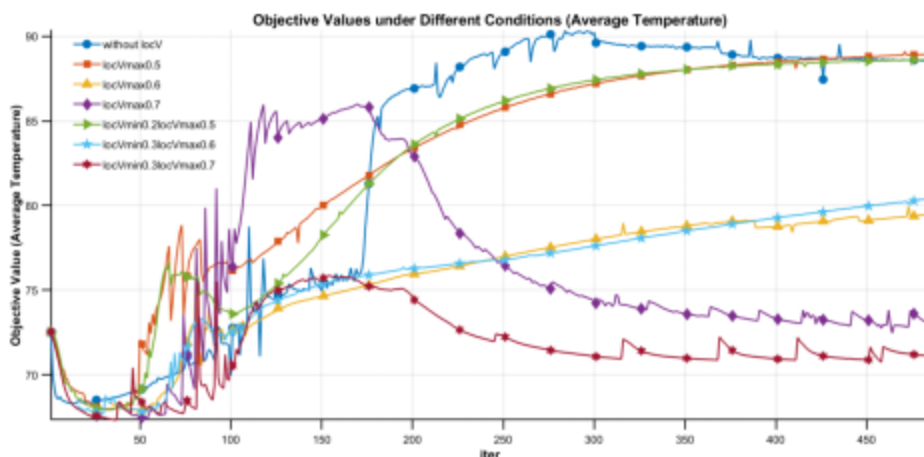


图 7 目标函数值（平均温度）步迭过程

Figure 7. Iterative Process of the Objective Function Value (Average Temperature)

3 结论

本文提出了一种局部体积约束方法，以优化液冷散热系统中的流热耦合问题。通过引入局部体积约束函数，有效克服了传统优化方法因全局能量耗散约束而导致的局部最优问题。数值结果表明，局部体积约束显著改善了流道结构的复杂度，增强了流体与固体之间的接触面积，从而提高了散热性能。与不使用局部体积约束的传统方法相比，采用局部体积约束后，优化结果表现出更为复杂的分支流道结构，能够显著提升流体的流动均匀性，并降低流动中的压力损失。除此之外，本文还研究了基于 harmonic 的插值方法，保证了温度计算的准确性，相较于传统的线性插值方法，能够更好地拟合流固界面的热流分布。

当局部体积约束上限从 0.5 提高到 0.7 时，流道结构的复杂度增加，流体流动路径变得更加均匀，进一步提高了热传导效率。平均温度降低幅度可达到 20%，从而极大地提升了液冷散热板的整体热管理能力。这一优化方法不仅能够有效降低电子设备的工作温度，还能确保散热过程中的温度分布更加均匀，为高功率电子设备的散热设计提供了更加有效的解决方案。

局部体积约束的引入还为未来的多物理场耦合拓扑优化问题提供了重要的理论和方法支持。基于该优化方法，液冷散热板能够在多个应用领域中实现更高的热效率，尤其是在高负荷条件下，确保设备稳定性并延长其使用寿命。这种局部体积约束的拓扑优化方法不仅适用于液冷散热系统的设计，还为其他领域的多物理场耦合优化提供了有益的借鉴。

参考文献

- [1] Qian G, Dou X, Lu G, et al. Parametric study and design of liquid cooling plates for high power density IGBT modules in wind power generation systems[J]. *Thermal Science and Engineering Progress*, 2023, 43: 101992.
- [2] Zhan S, Liang L, Li Z, et al. Topology optimization of liquid cooling plate for lithium battery heat dissipation based on a bionic leaf-vein structure[J], 2024, 231: 125898.
- [3] Yan S, Wang F, Hong J, et al. Topology optimization of microchannel heat sinks using a two-layer model[J], 2019, 143: 118462.
- [4] Zeng S, Lee P S J I J o H, Transfer M. Topology optimization of liquid-cooled microchannel heat sinks: An experimental and numerical study[J], 2019, 142: 118401.
- [5] 杨智颖, 卢伟, 姚嘉, et al. 基于变密度拓扑优化的液冷板散热流道设计[J], 2025, 14(2): 702.
- [6] 凌和平, 杨家培, 王汉治, et al. 车用功率模块液冷板多目标拓扑优化设计研究[J], 2025, 47(2): 326-331.
- [7] 王昊东, 刘鑫, 梅昊, et al. 基于拓扑优化技术的板式微通道反应器换热流体板散热性能优化[J], 2024, 14: 10.
- [8] 李新磊, 吴坤, 赵林英, et al. 面向发动机再生冷却的流热耦合拓扑优化[J], 2023, 55(11): 2661-2674.
- [9] Pan S, Yu M, Li H, et al. An integrated two-step strategy for an optimal design of liquid-cooled channel layout based on the MMC-density approach[J], 2022, 65(8): 221.
- [10] Lazarov B S, Sigmund O J I j f n m i e. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations[J], 2011, 86(6): 765-781.

-
- [11] Xu S, Cai Y, Cheng G J S, et al. Volume preserving nonlinear density filter based on heaviside functions[J], 2010, 41: 495-505.
- [12] Aage N, Lazarov B S J S, Optimization m. Parallel framework for topology optimization using the method of moving asymptotes[J], 2013, 47(4): 493-505.

第一作者简介：侯胜乐，大连理工大学力学与航空航天学院工程力学系，硕士研究生，车辆工程专业，主要研究方向为基于 OpenFOAM 的流热耦合拓扑优化，联系方式：18632827882, houshengle0119@163.com